

Schnittwinkel

Einleitung:

In den vorherigen Themen hatten wir das Skalarprodukt benutzt, um einen Winkel zu berechnen. Umgeformt, ergibt dies die Schnittwinkelformel.

Definition:

Schneiden sich zwei Geraden, Ebenen oder eine Gerade und eine Ebene entstehen vier Winkel. Zwei der Größe α und zwei $180-\alpha$. Unter **Schnittwinkel** versteht man die Winkel, die $\leq 90^\circ$ sind.

Um die Schnittwinkel zu berechnen, benutzen wir die Richtungsvektoren der Geraden bzw. die Normalenvektoren der Ebenen.

Formeln zu den Schnittwinkeln:

1. Gerade – Gerade, bzw. zweier Vektoren: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

2. *Gerade – Ebene: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

3. *Ebene – Ebene: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

***Zu 2.:**

Ist die Gerade (g) nicht orthogonal zur Ebene (E), dann gibt es eine Ebene (F), die orthogonal zu E ist und in der g liegt. Die Gerade g ist somit ein Richtungsvektor von F. Nun gibt es eine Schnittgerade (s) der beiden Ebenen. Wir berechnen den Schnittwinkel zwischen g und der Schnittgeraden s. Dieser Winkel ist aber nicht der eigentlich gesuchte Schnittwinkel. Dieser wäre der Winkel zwischen dem NV von E und dem RV von g $\rightarrow \cos(90^\circ - \alpha)$ oder aber auch $\sin(\alpha)$.

***Zu 3.:**

Man kann die Normalenvektoren benutzen, da der Winkel zwischen den NV genau der gleiche ist, wie zwischen den Ebenen, also zwischen den RV.

11. Schnittwinkel

Übungsaufgaben:

Schnittwinkel von zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$

$$\cos \varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

Diese Formel kann umgeformt werden, so dass wir den **Winkel φ** errechnen können.

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} \right)$$

Gegeben haben wir zum Beispiel die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. Nun berechnen wir als erstes das **Skalarprodukt** aus den beiden Vektoren.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38$$

2. Der Betrag eines Vektors bedeutet, dass die **Länge eines Vektors** errechnet wird.
Dazu wird der **Satz des Pythagoras** verwendet.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

3. Die Werte werden nun eingesetzt in die Schnittwinkelformel.

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{38}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{58}} \right) \approx 11,89^\circ$$

Schnittwinkel von zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Wenn sich zwei Geraden im dreidimensionalen reellen Raum schneiden, dann bildet sich zwischen diesen ein Schnittwinkel. Auch hier ist es auch möglich bei den Vektoren den Winkel zu bestimmen.

Dafür wird die folgende Formel zur Berechnung des Schnittwinkels der Vektoren verwendet.

$$\cos \varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

Diese Formel kann umgeformt werden, so dass wir den **Winkel φ** errechnen können.

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} \right)$$

Gegeben haben wir zum Beispiel die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Nun berechnen wir als erstes das **Skalarprodukt** aus den beiden Vektoren.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -2 - 2 + 1 = -3$$

2. Der Betrag eines Vektors bedeutet, dass die **Länge eines Vektors** errechnet wird.
Dazu wird der **Satz des Pythagoras** verwendet.

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

3. Die Werte werden nun eingesetzt in die Schnittwinkelformel.

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{-3}{3 \cdot \sqrt{3}} \right) = \cos^{-1} -\frac{1}{\sqrt{3}} = 125,26^\circ$$

Weitere Aufgaben:

1. Gerade – Gerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Gerade – Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E: 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5$$

3. Ebene – Ebene:

$$E_1: 3x_1 + 5x_2 = 6, E_2: 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1$$

1. Gerade – Gerade

Schnittpunkt herausfinden (Gleichsetzen)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1 + r = 2 + s$$

$$1 = 2 - s \Rightarrow s = 1$$

$$3r = 3 + 3s$$

$s=1$ einsetzen, dann bekommt man $r=2$ heraus. Nun eine von beiden einsetzen. Dann bekommt man den Schnittpunkt $(3|1|6)$.

Als nächstes alles in die gegebene Formel einsetzen

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11}} = \frac{10}{\sqrt{110}} = 0,33$$

$$\cos(0,33) \sim 70,73^\circ$$

2. Gerade – Ebene

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{11}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{38}} = \frac{11}{228} = 0,73$$

$$\alpha \sin 0,73 \sim 41,90^\circ$$

3. Ebene – Ebene

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{|3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 0 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{|-9|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{22}} = \frac{9}{\sqrt{748}} \sim 0,33$$

$$\alpha \cos 0,33 \sim 70,73^\circ$$

Berechne!

$$1. \quad \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Skalarprodukt berechnen:

$$\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 = (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 18$$

3. Betrag beider Vektoren berechnen:

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{27}$$

$$4. \quad \alpha = \arccos \left(\frac{18}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{27}} \right)$$

$$\alpha = \arccos(0.679) = 47,23^\circ$$